La première étape est de réécrire la fonction sous forme matricielle :

$2x_1^2 + 18x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 20x_3^2[+0x_1x_2 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3]$

$=$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0/2 & 18/2 \\ 0/2 & 5 & 6/2 \\ 18/2 & 6/2 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^t R x$$

$=$

$$trace\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \right) = trace(\hat{R}\bar{X})$$

Avec :

$X = x^t x$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X & x \\ x^t & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la contrainte, c'est exactement le même principe :

$[0x_1^2 + 0x_1x_3 + 0x_2^2 + 0x_2x_3 + 0x_3^2 + 0x_1x_2 +]2x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$=$

$$trace\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/2 \\ 2/2 & 3/2 & 2/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \right) = trace(\hat{W}\bar{X})$$

Et le programme SDP est donc :

$$\begin{aligned} &\text{Max trace}(\hat{R}\bar{X}) \\ &s.c. \quad \text{trace}(\hat{W}\bar{X}) \leq 5 \\ &\qquad\quad \bar{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

Pour l'examen, pas besoin de se préoccuper du dual.