Relaxation SDP, algorithme d'approximation et métaheuristique dans les réseaux de troisième génération (3G)

R. Lopez[1] et A. Lisser[2]

[1] Laboratoire de Recherche en Informatique,
Bat 490 Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex
lopez@lri.fr
[2] Laboratoire de Recherche en Informatique,
Bat 490 Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex
lisser@lri.fr

1 Introduction

Cet article présente un approfondissement des résultats présentés dans [5], en comparant la méthode présentée précédemment avec l'algorithme d'approximation de Goemans et Williamson [2], adaptée par Nesterov [8], et appliquée par Ma et al. [6] au problème de détection multiutilisateurs. Nous observons que cet algorithme obtient des résultats comparables à notre méthode [5] hybride (utilisant la relaxation semidéfinie positive et la recherche à voisinage variable) pour les instances CDMA non saturées, alors que pour les instances CDMA proches de la saturation (nombre d'utilisateurs proche du nombre maximal d'utilisateurs), notre méthode donne de meilleurs résultats.

2 Résumé

Le modèle utilisé (voir [9] pour plus de détails) est celui d'un canal CDMA synchrone à K utilisateurs, perturbé par du bruit blanc gaussien additif z, de variance $\sigma^2 = N_0/2$. Chaque utilisateur transmet un signal binaire modulé par une signature de longueur N. Soit $\mathbf{d}$ le vecteur émis, le récepteur reçoit, après filtrage adaptatif, un vecteur $\mathbf{y} = \mathbf{RCd} + \mathbf{z}$. Le détecteur optimal cherche alors $\hat{\mathbf{d}}$ tel que $\hat{\mathbf{d}} = \arg\max_{\mathbf{d}\in\mathcal{D}} p(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{d})$. Compte tenu de la fonction de log-vraisemblance négative associée à $p(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{d})$, on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg\min_{\mathbf{d}\in\{\pm 1\}^K} \mathbf{d}^T\mathbf{C}^T\mathbf{RCd} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{Cd} \tag{1}$$

Le choix d'utiliser la relaxation SDP vient des résultats obtenus pour les problèmes de type MAX-CUT, en particulier ceux de Goemans et Williamson [2] (et Feige et Goemans [1]). La relaxation SDP permet en effet d'obtenir de bonnes bornes (et par conséquent, une bonne approximation de la solution optimale par l'algorithme de Goemans et Williamson, ou de Zwick [11]). Pour plus de détails, voir la survey de H. Wolkowicz [10]. En posant $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{RC}$, $\mathbf{c} = \mathbf{Cy}$ et $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{d}}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \arg\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T\mathbf{Qu} - 2\mathbf{c}^T\mathbf{u} \\ &\text{s.c. } \mathbf{u} \in \{-1, 1\}^{n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

avec $K = n - 1$. Les résultats suivants sont vrais pour n'importe quelle matrice $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ [4]. En ajoutant une variable muette redondante u_n et en posant $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & u_n \end{bmatrix}^T$. On reformule alors le problème (2), qui devient

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T\mathbf{Lx} \quad \text{s.c. } \mathbf{x} \in \{-1, 1\}^n. \tag{3}$$

On utilise la formulation semidéfinie de ce problème en posant $\mathbf{X} = \mathbf{xx}^T$, $\mathbf{e}_n$ le vecteur unitaire de dimension n et $\text{diag}(\mathbf{X})$ est le vecteur des éléments diagonaux de $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_1^* = \arg\min_{\mathbf{X}} \text{tr}\{\mathbf{LX}\} \\ &\text{s.c.} \quad \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_n, \quad \text{rang}(\mathbf{X}) = 1, \quad \mathbf{X} \succeq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Si l'on relâche la contrainte de rang, on obtient le programme semidéfini suivant :

$$\mathbf{X}^* = \arg\min_{\mathbf{X}} \operatorname{tr}\{\mathbf{L}\mathbf{X}\} \quad \text{s.c. } \operatorname{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{X} \succeq 0. \tag{5}$$

Plusieurs outils existent pour résoudre de tels problèmes, nous avons choisi d'utiliser le logiciel développé par Helmberg, `SBmethod`, mettant en oeuvre la méthode du *Spectral Bundle*. Une fois obtenu la matrice $\mathbf{X}^*$, il faut alors l'approximer pour obtenir un vecteur $\mathbf{u}^*$ réalisable. Le principal algorithme d'approximation est celui de Goemans et Williamson [2], qui fut ensuite adaptée par Nesterov [8] puis appliquée par Ma et al. [6] au problème qui nous intéresse.

Une manière alternative de trouver une solution réalisable est d'utiliser la recherche à voisinage variable (RVV, ou VNS en anglais). Il s'agit d'une métaheuristique récente ([3], [7], par exemple) qui exploite l'idée de changement de voisinage tant lors de la descente vers des optima locaux que pour sortir des vallées qui les contiennent. Nous avons présenté en [5] des résultats concernant la résolution complète par VNS, ainsi qu'un algorithme hybride utilisant SDP et VNS.

Nos simulations montrent que l'algorithme d'approximation (noté SDP) de Ma et al. se comporte aussi bien que notre algorithme hybride SDP+VNS pour les cas ou le canal n'est pas saturé. En revanche, dans le cas où le canal est proche de la saturation, alors sa performance est inférieure à celle de notre algorithme hybride. Nous observons que plus le rapport signal bruit augmente, plus l'algorithme d'approximation perd en performance sur l'algorithme hybride.

Références

1. U. Feige and M. X. Goemans. Approximating the value of two power proof systems, with applications to max 2sat and max dicut. In *ISTCS '95 : Proceedings of the 3rd Israel Symposium on the Theory of Computing Systems (ISTCS'95)*, page 182, Washington, DC, USA, 1995. IEEE Computer Society.
2. M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *J. ACM*, 42(6) :1115–1145, 1995.
3. P. Hansen and N. Mladenović. Variable neighbourhood search. In F. Glover and G. A. Kochenberger, editors, *Handbook of Metaheuristics*, chapter 6. Kluwer, 2003.
4. C. Helmberg and F. Rendl. Solving quadratic (0,1)- problems by semidefinite programs and cutting planes. *Mathematical Programming*, 82 :291–315, 1998.
5. R. Lopez and A. Lisser. Recherche à voisinage variable et programmation semidéfinie positive dans les réseaux de troisième génération (3g). In *Actes des articles longs sélectionnés lors du 7ème congrès de la ROADEF*. Presses Universitaires de Valenciennes, 2006.
6. W. K. Ma, T. N. Davidson, K. M. Wong, Z. Q. Luo, and P. C. Ching. Quasi-maximum-likelihood multiuser detection using semidefinite relaxation with application to synchronous cdma. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(4) :912–922, 2002.
7. N. Mladenović and P. Hansen. Variable neighborhood search. *Comput. Oper. Res.*, 24(11) :1097–1100, 1997.
8. Y. E. Nesterov. Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization. *Optimization Methods and Software*, 9 :141–160, 1998.
9. P. H. Tan and L. K. Rasmussen. The application of semidefinite programming for detection in CDMA. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 19(8) :1442–1449, 2001.
10. H. Wolkowicz. Semidefinite and cone programming bibliography/comments.
11. U. Zwick. Outward rotations : A tool for rounding solutions of semidefinite programming relaxations, with applications to max cut and other problems. In *STOC*, pages 679–687, 1999.